SULL'ESISTENZA E UNICITÀ DELL'AMMORTAMENTO DEI PRESTITI IN REGIME LINEARE

On the existence and uniqueness of loans amortization using the simple interest law

Carlo MARI

Dipartimento di Economia
Università "G. D'Annunzio" di Chieti-Pescara

Departments of Economics
University "G. D'Annunzio" of Chieti-Pescara (Italy)

carlo.mari@unich.it

Graziano ARETUSI

Dipartimento di Economia
Università "G. D'Annunzio" di Chieti-Pescara

Departments of Economics
University "G. D'Annunzio" of Chieti-Pescara (Italy)

graziano.aretusi@gmail.com

Tratteremo dei prestiti valutati in regime lineare, dimostrando che esiste la possibilità, non ambigua, di costruire uno schema d'ammortamento che sia compatibile con l'assenza di anatocismo. Presenteremo, cioè, un modello di valutazione dei prestiti coerente con il principio, normato dal codice civile, che gli interessi maturati in un periodo non possano produrre ulteriori interessi nei periodi successivi. Mostreremo, inoltre, che lo schema di ammortamento proposto è l'unico consistente con la legge degli interessi semplici.

Parole Chiave: legge lineare • legge esponenziale • anatocismo • piano d'ammortamento • prestiti indicizzati.

We provide an evaluation model for amortizing loans which is consistent with the principle, stated in the Italian legislation, that interest produced in one period of time cannot earn interest in subsequent periods (anatocismo or compound interest). Based on the simple interest law, we derive an evaluation scheme which allows us to unambiguously quantify the outstanding loan balance at each period of time. Moreover, we show that the proposed scheme is the only one which is fully coherent with the simple interest law.

Keywords: simple interest • compound interest • amortizing loans • loan balance • indexed loans.

1. Introduzione

Dell'anatocismo si è ampiamente dibattuto nella letteratura finanziaria e giuridico-bancaria degli ultimi anni[1]. Il problema è essenzialmente legato all'utilizzo del regime esponenziale, o legge degli interessi composti, nella definizione di importi finanziariamente equivalenti esigibili in epoche diverse.

Si consideri, per fissare le idee, un importo monetario S esigibile al

1) Una rassegna completa delle pubblicazioni e della giurisprudenza sull'anatocismo è discussa in Annibali et al. *Anatocismo e ammortamento di mutui "alla francese" in capitalizzazione semplice*, Createspace Independent Pub, 2016. Si registra, inoltre, la recente Sentenza del Tribunale di Napoli n. 1558/2018 pubblicata il 13 febbraio 2018.

tempo 0. L'importo equivalente C esigibile al tempo T conformemente ad una legge degli interessi composti di tasso assegnato i, è definito dalla relazione

$$C = S(1 + i)^T. \tag{1}$$

Nel caso di un prestito, se S è l'importo che riceviamo al tempo 0, l'importo che dovremo restituire al tempo T, in regime di capitalizzazione composta al tasso i, viene determinato applicando l'Equazione (1). Implicitamente, nell'utilizzo di tale legge, si assume che gli interessi iS maturati nel primo periodo, maturino a loro volta altri interessi, cioè interessi anatocistici, in tutti i periodi successivi sino all'epoca finale T. Infatti, limitando per semplicità espositiva l'analisi al caso $T=2$, gli interessi maturati nel primo periodo iS concorrono con il capitale S a maturare interessi anche nel secondo periodo, generando così interessi pari a $i(S+iS)$ nel secondo periodo. Alla fine del secondo periodo dovremo restituire, pertanto, il capitale iniziale S, gli interessi maturati nel primo periodo iS, e gli interessi maturati nel secondo periodo $i(S+iS)$, cioè

$$C = S + iS + i(S + iS) = S(1 + i)^2. \tag{2}$$

Per evitare questo inconveniente, è possibile utilizzare una rappresentazione differente che consente ugualmente di definire importi equivalenti esigibili in epoche diverse, ma impedendo che si generino interessi anatocistici[2]. Adottando, infatti, il regime lineare (o legge degli interessi semplici) per definire importi finanziariamente equi-

2) Sulla disciplina dell'anatocismo si è formata una nutrita giurisprudenza, ormai consolidata, che indica che l'interesse vada applicato secondo le formule attuariali dell'interesse semplice e non di quello composto. In particolare, essa si è formata sulla base dei principi affermati nel codice civile e, precisamente, all'art.1283 che recita: «In mancanza di usi contrari, gli interessi scaduti possono produrre interessi solo dal giorno della domanda giudiziale o per effetto di convenzione posteriore alla loro scadenza, e sempre che si tratti di interessi dovuti almeno per sei mesi» e all'art.821: «I frutti naturali appartengono al proprietario della cosa che li produce, salvo che la loro proprietà sia attribuita ad altri. In quest'ultimo caso la proprietà si acquista con la separazione. Chi fa propri i frutti deve, nei limiti del loro valore, rimborsare colui che abbia fatto spese per la produzione e il raccolto. I frutti civili si acquistano giorno per giorno, in ragione della durata del diritto.». Sulla base di questi due principi normativi, il divieto di anatocismo sugli interessi implica, necessariamente, che per regolare correttamente il rapporto dare avere tra le parti si debba applicare il regime semplice degli interessi.

valenti esigibili in epoche diverse, potremo riscrivere l'Equazione (1) nel modo seguente

$$C = S(1 + iT), \tag{3}$$

che bene evidenzia come gli interessi maturati in ogni periodo non generano altri interessi nei periodi successivi. Infatti, limitando ancora l'analisi al caso $T=2$, gli interessi maturati nel primo periodo iS, a differenza della valutazione in regime esponenziale, non concorrono con il capitale S a maturare interessi nel secondo periodo. Nel secondo periodo, infatti, gli interessi maturati saranno ancora pari a iS e, alla fine del secondo periodo, dovremo restituire il capitale iniziale S, gli interessi maturati nel primo periodo iS, e gli interessi maturati nel secondo periodo iS, cioè

$$C = S + iS + iS = S(1 + 2i). \tag{4}$$

Nel regime semplice, gli interessi sono proporzionali al capitale impiegato, alla durata dell'operazione di scambio e, naturalmente, al tasso di interesse[3].
Le Equazioni (1) e (3) possono essere riscritte in termini di valore attuale al tempo 0,

$$S = Cv_0(T), \tag{5}$$

dove $v_0(t)$ è la funzione di sconto al tempo 0 (intesa come funzione

3) Su questo aspetto il Polidori evidenzia che «nella capitalizzazione semplice gli interessi non sono convertibili, cioè non producono interessi: essi sono direttamente proporzionali al capitale impiegato *S*, alla durata dell'impiego *T* ed al tasso *i*» (C. Polidori, *Matematica Finanziaria*, pag.7, Le Monnier, Firenze, 1954). Il meccanismo matematico primario generatore di anatocismo si individua, dunque, nell'applicazione del regime composto degli interessi poiché si sostanzia, per definizione, nella capitalizzazione degli interessi su un capitale affinché essi siano a loro volta produttivi di altri interessi. Il Levi, oltre a segnalare che nel regime composto non si ha più la proporzionalità dell'interesse rispetto al tempo (E. Levi, *Corso di Matematica Finanziaria*, pag.69, La Goliardica, Milano, Terza Edizione, 1959), specifica che il concetto di interesse composto coincide con quello di anatocismo poiché scrive: «Originariamente capitalizzazione significa capitalizzazione degli interessi, e cioè trasformazione degli interessi in capitale, è dunque il fatto, per cui contrattualmente si stabilisce (nelle operazioni a lunga scadenza) che periodicamente gli interessi si aggiungono al capitale, e dal quel punto in poi l'interesse si calcola sul montante (con la formula prestabilita). È questo il concetto elementare di interesse composto (o anatocismo).» (E. Levi, *Corso di Matematica Finanziaria*, pag.31, La Goliardica, Milano, 1953).

della variabile temporale t). Nel regime della capitalizzazione composta è

$$v_0(t) = \frac{1}{(1+i)^t}, \tag{6}$$

mentre nel regime semplice è

$$v_0(t) = \frac{1}{1+it}. \tag{7}$$

In questa rappresentazione, si suol definire S valore attuale al tempo 0 dell'importo C esigibile al tempo T. Per definizione il valore attuale di un importo esigibile in un epoca futura "depura" tale importo dagli interessi maturati e lo trasforma in un importo equivalente all'epoca di valutazione. Utilizzando quest'ultima rappresentazione e riferendoci al regime lineare, la determinazione degli interessi maturati nei vari periodi di tempo può essere facilmente effettuata. Infatti, per determinare gli interessi maturati nel primo periodo occorre moltiplicare il capitale S per il tasso di interesse i. In questo modo, sommando capitale ed interessi, si ottiene $S(1+i)$ al tempo $T=1$, valore che è finanziariamente equivalente all'importo S disponibile al tempo 0. Per determinare gli interessi maturati nel secondo periodo è sufficiente moltiplicare il valore attuale di $S(1+i)$, cioè S, per il tasso i. Sommando gli interessi maturati nel secondo periodo si ottiene $S(1+2i)$ al tempo $T=2$. Gli interessi maturati nel terzo periodo potranno essere calcolati moltiplicando il valore attuale di $S(1+2i)$ esigibili al tempo $T=2$, cioè di nuovo S, per il tasso i, ottenendo ancora iS. E così di seguito per tutta la durata dell'operazione. Questo modo di procedere, sebbene possa apparire ridondante nel caso di prestiti che sono rimborsati in unica soluzione alla scadenza, si rivelerà molto utile per costruire uno schema di ammortamento dei prestiti in regime lineare, consistente con l'assenza di interessi anatocistici. Infatti, per quanto l'utilizzo della legge lineare nella regolazione di prestiti che vengono rimborsati in unica soluzione alla scadenza è immediato, nel caso dei finanziamenti rateali, che prevedono il rimborso del capitale attraverso una successione di importi (le rate) esigibili in epoche diverse, il problema appare, come vedremo, ben più complicato. In questo lavoro presenteremo un modello generale di valutazione dei prestiti in regime lineare. Vedremo che tale schema consente di ripartire in modo univoco la quota interessi e la quota di capitale delle rate di rimborso senza, per questo, dover utilizzare la legge della capitalizzazione composta[4]. Mostreremo, infine, che lo schema di ammortamento dei prestiti proposto è l'unico coerente con la legge lineare e, come tale, consistente con l'assenza di interessi anatocistici nelle rate di rimborso.

2. Prestiti lineari

Si consideri un mutuo acceso al tempo 0 per un importo S da rimborsare in m rate posticipate di importi $R_1, R_2 \cdots, R_m$, esigibili ai tempi $1, 2, \cdots, m$ rispettivamente[5]. Il mutuo è valutato sulla base di una legge lineare di tasso i. Per la determinazione degli importi delle rate, occorre imporre una condizione di equivalenza finanziaria, altresì detta condizione di *equità* finanziaria, che stabilisca l'uguaglianza tra il valore attuale delle rate di rimborso e l'importo mutuato,

$$S = \sum_{k=1}^{m} R_k \, v_0(k) \, , \tag{8}$$

cioè

4) In un recente lavoro, Fersini e Olivieri affrontano il problema dell'anatocismo nell'ammortamento alla francese (P. Fersini, G. Olivieri, *Sull'"anatocismo" nell'ammortamento francese*. Banche e Banchieri, Anno XXXXII – N.2/2015, pagg.134-171). In Particolare, gli autori sottolineano che «Il presente lavoro, alla luce di molta recente "letteratura" giuridico-bancaria, cerca di definire in modo rigoroso e completo le caratteristiche, dal punto di vista matematico-finanziario, dell'ammortamento così detto "francese". Si evidenzierà che, poiché la rata dell'ammortamento "francese" è calcolata nel regime finanziario della capitalizzazione composta, ciò comporta, necessariamente, il calcolo di interessi su interessi. A tal fine gli interessi saranno suddivisi in due parti, una riferita agli interessi di ogni periodo e l'altra agli interessi sugli interessi. Sarà presentato il caso in cui, per calcolare la rata costante, si utilizzi il regime finanziario degli interessi semplici ponendo in evidenza che, in tale circostanza, non esiste un solo modo per ripartire la rata in quota interessi e capitale. Ripartire in modo univoco la quota interessi e capitale implica che la rata di qualsiasi ammortamento debba essere calcolata nel regime della capitalizzazione composta.»

5) La trattazione prescinde dall'unità di misura scelta per misurare i tempi. L'impostazione presentata è generale e consente di trattare l'ammortamento dei prestiti indipendentemente dalla periodicità delle rate di rimborso. Naturalmente, l'unità di misura del tasso di interesse deve essere coerente con l'unità di misura scelta per misurare i tempi.

$$S = \sum_{k=1}^{m} \frac{R_k}{1 + ik} \,. \tag{9}$$

Ovviamente l'Equazione (9) ammette, in generale, infinite soluzioni (m incognite, gli importi delle rate $R_1, R_2, \cdots, R_m$, e un'unica equazione) che conferiscono all'ente erogante la possibilità di confezionare prestiti personalizzati sulla base delle esigenze della clientela. Nell'ipotesi che il mutuo venga strutturato a rata costante, l'Equazione (9) ammette una ed una sola soluzione per la rata incognita R data da

$$R = \frac{S}{\sum_{k=1}^{m} (1 + ik)^{-1}} \,. \tag{10}$$

Se indichiamo con M_k il valore del debito residuo all'epoca k, è possibile dimostrare che, nello schema proposto, le rate di rimborso ammettono la decomposizione seguente

$$R_k = M_{k-1} - M_k + i \frac{M_{k-1}}{1 + i(k-1)} \,, \tag{11}$$

dove

$$M_k = \left(S - \sum_{n=1}^{k} \frac{R_n}{1 + in} \right) (1 + ik) \,. \tag{12}$$

L'Appendice A al presente lavoro contiene la dimostrazione delle Equazioni (11) e (12). La generica rata R_k, dunque, viene decomposta in una quota capitale C_k, e in una quota interessi I_k, che sono date rispettivamente da

$$\begin{aligned} C_k &= M_{k-1} - M_k, \\ I_k &= i \frac{M_{k-1}}{1 + i(k-1)} \,. \end{aligned} \tag{13}$$

La quota di capitale, come usuale, quantifica la variazione del debito residuo. La quota interessi è calcolata sul **valore attuale** al tempo 0 del debito residuo e ha un'interpretazione finanziaria immediata e coerente con l'assenza di anatocismo. Per evitare, infatti, di includere gli *interessi sugli interessi* nelle rate di rimborso del mutuo, il calcolo della quota interessi dovuta alla generica epoca k (e contenuta nella rata k -esima) viene effettuato non sulla base del valore M_{k-1} del debito residuo all'epoca k-1, come nel caso dei mutui progettati secondo il regime esponenziale, ma sulla base del **valore attuale** al tempo 0 del debito residuo all'epoca k-1

$$V_0(M_{k-1}) = \frac{M_{k-1}}{1 + i(k-1)}, \tag{14}$$

coerentemente con la legge lineare. Come anticipato nell'Introduzione, il calcolo del valore attuale depura il debito residuo dagli interessi corrisposti nei periodi di tempo precedenti. In questo modo, si impedisce che gli interessi maturati in un periodo temporale continuino a produrre interessi nei periodi temporali successivi. Dimostreremo nella Sezione 3 che qualunque altro schema d'ammortamento progettato utilizzando la legge lineare, ma imponendo la condizione di equità finanziaria in un'epoca diversa da quella iniziale, non assicura piena coerenza con la legge degli interessi semplici.
L'Equazione (12) consente di calcolare il valore del debito residuo alle varie epoche da un punto di vista retrospettivo. Infatti M_k, cioè il valore del debito residuo all'epoca k, viene determinato calcolando il valore attuale al tempo 0 del debito dopo il pagamento delle prime k rate, capitalizzato all'epoca k conformemente alla legge lineare. Ovviamente, è possibile impostare il calcolo del debito residuo da un punto di vista prospettico secondo la relazione

$$M_k = \left(\sum_{n=k+1}^{m} \frac{R_n}{1 + in}\right)(1 + ik), \tag{15}$$

che mostra come M_k possa essere determinato calcolando il valore attuale al tempo 0 delle m-k rate non ancora pagate all'epoca k, capitalizzato sino all'epoca k. Naturalmente, i valori del debito residuo, calcolati in senso retrospettivo utilizzando l'Equazione (12) o in senso prospettico utilizzando l'Equazione (15), coincidono. Valgono, ovviamente, le relazioni $M_0=S$ e $M_m=0$ che assicurano il rispetto della condizione di equità finanziaria e la chiusura del piano d'ammortamento dopo il pagamento dell'ultima rata (per la dimostrazione di

questi risultati si veda l'Appendice A).
La Tabella 1 presenta il piano d'ammortamento di un prestito per un importo S=100 da rimborsare in 4 rate annuali posticipate al tasso i=5% su base annuale, determinato utilizzando le tecniche di calcolo introdotte.

k	R_k	C_k	I_k	M_k
0	0	0	0	100
1	28.06	23.06	5.00	76.94
2	28.06	24.39	3.66	52.55
3	28.06	25.67	2.39	26.89
4	28.06	26.89	1.17	0

Tabella 1: Piano d'ammortamento in regime lineare. Ogni rata R_k è decomposta nella quota di capitale C_k e nella quota interessi I_k. I valori del debito residuo M_k sono riportati nell'ultima colonna.

Come utile confronto, la Tabella 2 presenta il piano di ammortamento dello stesso prestito ma valutato secondo una legge degli interessi composti al tasso del 5% su base annuale.

k	R_k	C_k	I_k	M_k
0	0	0	0	100
1	28.20	23.20	5.00	76.80
2	28.20	24.36	3.84	52.44
3	28.20	25.58	2.62	26.86
4	28.20	26.86	1.34	0

Tabella 2: Piano d'ammortamento in regime esponenziale. Ogni rata R_k è decomposta nella quota di capitale C_k e nella quota interessi I_k. I valori del debito residuo M_k sono riportati nell'ultima colonna.

La differenza degli importi delle rate si scarica essenzialmente sulle quote interessi, sensibilmente più elevate nel regime esponenziale per la presenza di interessi anatocistici.

3. Altre impostazioni in regime lineare

Lo schema d'ammortamento proposto nella Sezione 2 fonda la sua validità sulla determinazione delle rate di rimborso di un prestito in base alla condizione di equità finanziaria descritta dall'Equazione (9), che stabilisce l'uguaglianza tra il valore attuale al tempo 0 delle rate di rimborso e il capitale prestato. Come conseguenza, l'interpretazione delle grandezze che compongono il piano d'ammortamento appare immediata e coerente con l'assenza di interessi anatocistici.
Esiste, tuttavia, la possibilità di costruire piani d'ammortamento in regime lineare a partire da una condizione di equità finanziaria che anziché essere imposta all'istante di valutazione 0, viene imposta in istanti di tempo successivi[6]. Descriveremo di seguito questi diversi approcci anticipando che, come avremo modo di verificare durante la trattazione, tali rappresentazioni matematiche presentano elementi di inconsistenza con la legge lineare.
Cominceremo col considerare il caso in cui la condizione di equità finanziaria secondo la legge lineare venga imposta all'epoca finale[7], cioè l'epoca m, e imporremo che il valore dell'importo mutuato, erogato al tempo 0, opportunamente capitalizzato in regime lineare sino alla data di scadenza del mutuo m, sia uguale al valore delle rate di rimborso capitalizzate dalla data di esigibilità delle stesse sino alla data di scadenza del mutuo, come descritto dalla relazione seguente

$$S(1 + im) = \sum_{k=1}^{m} R_k \left(1 + i(m - k)\right). \tag{16}$$

Anche l'Equazione (16) ammette, in generale, infinite soluzioni, ma nell'ipotesi che il mutuo venga strutturato a rata costante è immediato dimostrare che esiste una ed una sola soluzione per la rata incognita R, data da

6) Su questo aspetto, infatti, il Levi specifica che «essendo molteplici le scadenze sia delle prestazioni che delle controprestazioni, bisognerà fissare anche un'epoca di riferimento e intendere che tra le prestazioni e controprestazioni debba sussistere il vincolo che, riportandole, con la legge di interesse o sconto prescelta, all'epoca di riferimento pure prefissata, il valore delle prime eguagli il valore delle seconde.» (E. Levi, *Corso di Matematica Finanziaria*, pag.105, La Goliardica, Milano 1953).
7) Varoli fa riferimento ad una tale possibilità nel suo testo di matematica finanziaria (G. Varoli, *Matematica Finanziaria*, pag.120, Pàtron Editore, Bologna 1983).

$$R = \frac{S(1 + im)}{\sum_{k=1}^{m}(1 + i(m - k))} \,. \tag{17}$$

La condizione di equità finanziaria imposta all'epoca finale m può essere formalmente riscritta in termini di valore attuale al tempo 0 nel modo seguente

$$S = \sum_{k=1}^{m} R_k \, v_0(k) \,, \tag{18}$$

dove

$$v_0(t) = \frac{1 + i(m - t)}{1 + im} \,. \tag{19}$$

L'Equazione (19) mostra un risultato importante: nel caso della legge lineare imporre la condizione di equità finanziaria all'epoca finale anziché all'epoca iniziale significa, di fatto, adottare una legge di valutazione differente, cioè un differente regime finanziario[8]. Questo aspetto non è evidente quando si considerano scambi limitati a due importi monetari esigibili in epoche diverse. In questo caso particolare, infatti, imporre la condizione di equità finanziaria al tempo 0 oppure all'epoca finale, non modifica i valori degli importi equivalenti oggetto dello scambio. È immediato verificare che l'importo S esigibile al tempo 0 e l'importo $C=S(1+iT)$ esigibile al tempo T sono importi equivalenti in regime lineare al tasso i, sia nel caso in cui la condizione di equità finanziaria venga imposta in t=0, sia che essa venga imposta al tempo $t=T$. Nei finanziamenti rateali, come avremo modo di vedere, gli importi oggetto dello scambio non sono più invarianti rispetto all'istante di tempo in cui viene imposta la condizione di equità finanziaria: cambiare l'epoca in cui definire l'equivalenza finanziaria significa di fatto cambiare la funzione di sconto e, di conseguenza, la legge di valutazione[9]. E quale di queste leggi di valuta-

8) Osserviamo che la funzione di sconto descritta dall'Equazione (19) dipende da m, cioè dall'epoca finale dell'operazione di prestito. Questo significa che prestiti di durata diversa verranno valutati con funzioni di sconto diverse!

9) Mutui progettati secondo il regime esponenziale non presentano questo tipo di inconvenienti. Infatti la legge esponenziale, a differenza della legge lineare, gode

zione è coerente con la legge degli interessi semplici? Mostreremo in questa sezione che esiste uno ed un solo schema d'ammortamento coerente con il regime lineare, che si ottiene utilizzando la rappresentazione analitica descritta nella Sezione 2 che consegue dall'imporre la condizione di equità finanziaria all'epoca iniziale.
Nello schema di ammortamento che deriva da una condizione di equità finanziaria imposta all'epoca finale m, le rate ammettono la decomposizione seguente

$$R_k = M_{k-1} - M_k + i\frac{M_{k-1}}{1 + i(m - k)}, \tag{20}$$

dove

$$M_k = \frac{S(1 + im) - \sum_{n=1}^{k} R_n\,(1 + i(m - n))}{1 + i(m - k)}. \tag{21}$$

Per la dimostrazione si veda l'Appendice A. La generica rata R_k viene, dunque, decomposta in una quota capitale C_k, e in una quota interessi I_k, che sono date rispettivamente da

$$\begin{aligned} C_k &= M_{k-1} - M_k, \\ I_k &= i\frac{M_{k-1}}{1 + i(m - k)}. \end{aligned} \tag{22}$$

L'interpretazione finanziaria della quota interessi non è altrettanto immediata come nel caso precedente in cui la condizione di equità finanziaria è imposta all'epoca iniziale. Anche in questo caso, tuttavia, è possibile impostare il calcolo del debito residuo da un punto di vista prospettico tenendo conto delle rate non ancora pagate all'epoca secondo la relazione

della proprietà di scindibilità (F. Moriconi, *Matematica Finanziaria*, pag.51, Il Mulino, Bologna, 1994). Indipendentemente dall'epoca in cui si conviene di imporre la condizione di equità finanziaria, si ottengono sempre gli stessi valori degli importi oggetti dello scambio, cioè delle rate di rimborso, delle quote di capitale e delle quote interessi. Il Levi, infatti, osserva che «quando si scelgano leggi di int. e sconto composto coniugate, se due complessi di prestazioni sono equivalenti a una data epoca, lo sono anche a qualunque altra epoca.» (E. Levi, *Corso di Matematica Finanziaria*, pag.106, La Goliardica, Milano, 1953).

$$M_k = \frac{\sum_{n=k+1}^{m} R_n \left(1 + i(m-n)\right)}{1 + i(m-k)} \,. \qquad (23)$$

Naturalmente, i valori del debito residuo, calcolati in senso retrospettivo utilizzando l'Equazione (21) o in senso prospettico utilizzando l'Equazione (23), coincidono. Valgono, ovviamente, le relazioni $M_0=S$ e $M_m=0$ che assicurano il rispetto della condizione di equità finanziaria e la chiusura del piano d'ammortamento dopo il pagamento dell'ultima rata (per la dimostrazione di questi risultati si veda l'Appendice A).
La Tabella 3 presenta il piano di ammortamento di un prestito per un importo S=100 da rimborsare in 4 rate annuali posticipate al tasso i=5% su base annuale, nell'ipotesi di adottare una condizione di equità finanziaria all'epoca finale (m=4).

k	R_k	C_k	I_k	M_k
0	0	0	0	100
1	27.91	23.56	4.35	76.44
2	27.91	24.43	3.47	52.01
3	27.91	25.43	2.48	26.58
4	27.91	26.58	1.33	0

Tabella 3: Piano d'ammortamento con equità finanziaria all'epoca finale (*m=4*).

Come anticipato, il valore delle rate di rimborso dipende dall'epoca in cui viene imposta la condizione di equità finanziaria. In questo caso il valore della rata, pari a 27.91, è inferiore al valore della rata determinata imponendo la condizione di equità finanziaria all'epoca iniziale, che risulta essere 28.06. È piuttosto singolare però osservare che la prima quota interessi calcolata sul debito iniziale S=100 è pari a 4.35 e non a 5!
L'incoerenza con la legge lineare della costruzione del piano d'ammortamento ottenuta imponendo una condizione di equità finanziaria all'epoca finale è ancora più evidente nell'esempio seguente, in cui un prestito per un importo pari a S=100 erogato al tempo 0, viene rimborsato in unica soluzione alla scadenza al tempo T=4 anni, al tasso i=5% su base annuale. Mostreremo che, al contrario, lo sche-

ma d'ammortamento proposto nella Sezione 2, utilizzato per valutare quest'ultima operazione mostra piena coerenza con la legge lineare. Entrambe le rappresentazioni concordano sugli importi equivalenti che regolano lo scambio: l'importo S=100 erogato al tempo 0 viene rimborsato mediante il pagamento di un unica rata al tempo T=4 di importo pari a 120. Tuttavia, i piani di ammortamento costruiti nei due diversi schemi risultano alquanto differenti. La Tabella 4 mostra il piano d'ammortamento del prestito nell'ipotesi che la condizione di equità finanziaria venga imposta all'epoca finale.

k	R_k	C_k	I_k	M_k
1	0	-4.35	4.35	104.35
2	0	-4.74	4.74	109.09
3	0	-5.19	5.19	114.29
4	120	114.29	5.71	0

Tabella 4: Piano d'ammortamento con equità finanziaria all'epoca finale (*m=4*).

Se avessimo utilizzato lo schema d'ammortamento proposto nella Sezione 2, in cui la condizione di equità è imposta all'epoca iniziale, il piano d'ammortamento risulterebbe quello rappresentato nella Tabella 5.

k	R_k	C_k	I_k	M_k
0	0	0	0	100
1	0	-5	5	105
2	0	-5	5	110
3	0	-5	5	115
4	120	115	5	0

Tabella 5: Piano d'ammortamento con equità finanziaria all'epoca iniziale.

Come è possibile osservare nell'ultima colonna della Tabella 5, il debito residuo cresce linearmente nel tempo perché gli interessi maturati nei vari periodi sono costanti e pari a iS (nell'esempio considerato è iS=5): *«gli interessi sono direttamente proporzionali al capitale impiegato S, alla durata dell'impiego T ed al tasso i»* (C. Polidori,

Matematica Finanziaria, pag.7, Le Monnier, Firenze, 1954), conformemente alla legge lineare. Questo non accade nello schema d'ammortamento con condizione di equità imposta all'epoca finale, come mostrato nella Tabella 4. L'utilizzo dello schema di ammortamento in regime lineare con condizione di equità finanziaria imposta all'epoca iniziale è, dunque, perfettamente coerente con la legge degli interessi semplici e, di conseguenza, con l'assenza di anatocismo nel calcolo degli interessi.
Se nella valutazione dell'operazione finanziaria appena descritta, avessimo utilizzato uno schema ancora differente basato sull'applicazione della condizione di equità finanziaria ad un istante di tempo intermedio tra l'epoca iniziale e l'epoca finale, non avremmo trovato accordo nemmeno nella determinazione degli importi oggetto dello scambio. Infatti, nell'ipotesi di imporre una condizione di equità finanziaria all'epoca t=1, avremmo ottenuto

$$S(1+i) = \frac{C}{1+3i}, \tag{24}$$

da cui

$$C = S(1+i)(1+3i) = S(1+4i+3i^2) = 120.75\,. \tag{25}$$

In termini generali, se si impone la condizione di equità finanziaria in un'istante di tempo $t \in [0,T]$, si ottiene

$$S(1+it) = \frac{C}{1+i(T-t)}, \tag{26}$$

da cui

$$C = S[1 + iT + i^2 t(T-t)]. \tag{27}$$

Si avrà, dunque, coincidenza degli importi oggetto dello scambio se e solo se t=0 oppure $t=T$. La Tabella 6 riporta gli importi equivalenti oggetto dello scambio, nell'ipotesi di imporre la condizione di equità finanziaria alle varie epoche t=0,1,2,3,4.

t	C
0	$S(1+4i)=120.00$
1	$S(1+4i+3i^2)=120.75$
2	$S(1+4i+4i^2)=121.00$
3	$S(1+4i+3i^2)=120.75$
4	$S(1+4i)=120.00$

Tabella 6: Condizione di equità finanziaria ad un istante di tempo qualsiasi: importi oggetto dello scambio.

Lo schema illustrato e discusso nella Sezione 2 risulta, pertanto, l'unico schema consistente con una valutazione basata sull'utilizzo della legge lineare e, come tale, non consente la generazione di interessi anatocistici nella definizione e nell'ammortamento dei prestiti.

4. Prestiti indicizzati in regime lineare

Lo schema d'ammortamento proposto nella Sezione 2 può essere esteso anche ai prestiti indicizzati. Tipicamente, nell'ammortamento di un prestito indicizzato la quota interessi viene calcolata in riferimento ad un parametro variabile nel tempo in modo aleatorio, di solito un tasso di riferimento di mercato eventualmente aumentato di uno *spread* per tener conto del rischio di credito. Indicando allora con $\{i_t\}$la successione dei valori assunti dal parametro di indicizzazione ai tempi 0,1, … ,m-1 e fissato un piano di rimborso per le quote di capitale, la prima quota interessi sarà data da

$$I_1 = i_0 M_0, \tag{28}$$

mentre le quote interessi relative alle epoche successive potranno essere calcolate utilizzando la relazione seguente

$$I_k = i_{k-1} \frac{M_{k-1}}{1 + \sum_{n=0}^{k-2} i_n} \qquad k = 2, \cdots, m. \tag{29}$$

La logica è la stessa adottata nella Sezione 2. Per evitare la generazione di interessi anatocistici nelle rate di rimborso del prestito indicizzato, la quota interessi relativa all'epoca k viene determinata moltiplicando il valore del parametro di indicizzazione i_{k-1}, relativo al periodo

$[k\text{-}1,k]$, per il valore del debito residuo all'epoca k-1 opportunamente **attualizzato** al tempo 0. Ovviamente nel caso della prima quota interessi non occorre effettuare alcuna attualizzazione in quanto $M_0=S$ è un importo esigibile al tempo 0. Per il calcolo delle quote interessi relative alle epoche successive, l'attualizzazione del debito residuo M_{k-1} viene effettuata secondo lo schema

$$V_0(M_{k-1}) = \frac{M_{k-1}}{1+\sum_{n=0}^{k-2} i_n} \qquad k = 2,\cdots,m. \tag{30}$$

L'Equazione (30) rappresenta, da questo punto di vista, un'estensione dell'Equazione (14) e ad essa si riconduce nel caso in cui i valori assunti dal parametro di indicizzazione siano costanti, cioè $i_0 = i_1 = \cdots = i_{m-1} = i$.

5. La costruzione del piano d'ammortamento

In questa appendice verrà presentata una metodologia generale per la costruzione dei piani d'ammortamento dei prestiti che è indipendente dal regime finanziario adottato e da cui seguono tutti i risultati discussi nel testo[10].

Si consideri un mutuo acceso al tempo 0 per un importo S da rimborsare in m rate posticipate di importi $R_1, R_2, \cdots, R_m$ esigibili ai tempi $1, 2\cdots, m$ rispettivamente. Il mutuo è valutato sulla base di legge di equivalenza finanziaria assegnata, che in questa appendice rappresenteremo nei termini di una funzione di sconto generica $v_0(t)$ al tempo 0. Gli importi delle rate sono determinati coerentemente con la condizione di equità finanziaria seguente

$$S = \sum_{k=1}^{m} R_k \, v_0(k), \tag{A.1}$$

che stabilisce l'uguaglianza tra il valore attuale delle rate di rimborso

10) La trattazione vale, dunque, per l'ammortamento dei prestiti progettati secondo la legge esponenziale, la legge lineare e qualsivoglia altra legge finanziaria.

e l'importo mutuato. Per la costruzione del piano d'ammortamento è sufficiente richiedere che ad ogni epoca k $(1 \leq k \leq m)$, il valore del debito residuo valutato retrospettivamente, ottenuto cioè capitalizzando all'epoca k l'importo mutuato e sottraendo i valori capitalizzati tra la data di esigibilità e l'epoca k delle k rate pagate,

$$M_k = \frac{S}{v_0(k)} - \sum_{n=1}^{k} \frac{R_n}{v_n(k)}, \tag{A.2}$$

sia uguale al valore del debito residuo valutato prospetticamente, calcolato come valore attuale delle m-k rate non ancora pagate al tempo k,

$$M_k = \sum_{n=k+1}^{m} R_n \, v_k(n). \tag{A.3}$$

La grandezza $v_k(t)$ rappresenta la funzione di sconto al tempo k $(k \leq t)$. È immediato verificare che le Equazioni (A.3) e (A.2) sono soddisfatte simultaneamente se

$$v_k(t) = \frac{v_0(t)}{v_0(k)} \qquad 0 \leq k \leq t. \tag{A.4}$$

L'equazione (A.4) esprime anche una condizione necessaria e sufficente per evitare arbitraggi (F. Moriconi, Matematica Finanziaria, pag. 224, Il Mulino, Bologna, 1994).
La decomposizione delle rate in una quota di capitale e una quota interessi segue immediatamente dalla rappresentazione analitica del debito residuo data dall'Equazione (A.2) (o dall'Equazione (A.3)). In riferimento alla rata R_k si ottiene infatti,

$$R_k = M_{k-1} - M_k + \left[\frac{v_0(k-1)}{v_0(k)} - 1\right] M_{k-1}, \tag{A.5}$$

da cui segue la decomposizione in una quota di capitale C_k e una quota interessi I_k che sono date rispettivamente da

$$C_k = M_{k-1} - M_k,$$
$$I_k = \left[\frac{v_0(k-1)}{v_0(k)} - 1\right] M_{k-1}\,. \tag{A.6}$$

Questo completa la costruzione del piano d'ammortamento. Valgono, naturalmente, le condizioni $M_0=S$ e $M_m=0$ che assicurano il rispetto della condizione di equità finanziaria e la chiusura del piano d'ammortamento dopo il pagamento dell'ultima rata[11].
Lo schema d'ammortamento descritto nella Sezione 2 si ottiene come caso particolare della trattazione presentata in questa appendice assumendo

$$v_0(t) = \frac{1}{1+it}, \tag{A.7}$$

che descrive la funzione di sconto in regime lineare con condizione di equità imposta all'epoca iniziale 0. Parimenti, lo schema d'ammortamento descritto nella Sezione 3 si ottiene come ulteriore caso particolare assumendo

$$v_0(t) = \frac{1+i(m-t)}{1+im} \qquad m \geq t, \tag{A.8}$$

che descrive la funzione di sconto in regime lineare con condizione di equità imposta all'epoca finale m.

11) È immediato verificare che, se il piano d'ammortamento è costruito secondo lo schema generale proposto in questa appendice, esso rispetta simultaneamente tutte le condizioni di compatibilità definite da Fersini e Olivieri (P. Fersini, G. Olivieri. *Sull'"anatocismo" nell'ammortamento francese*. Banche e Banchieri, Anno XXXXII – N.2/2015, pagg.134-171). In particolare la grandezza

$$j(k-1,k) = \frac{v_0(k-1)}{v_0(k)} - 1\,,$$

descrive il tasso di interesse periodale sull'orizzonte temporale $[k-1,k]$.

Riferimenti bibliografici

Annibali A., Barracchini C. e Annibali A. *Anatocismo e ammortamento di mutui "alla francese" in capitalizzazione semplice.* Createspace Independent Pub, 2016.

Fersini P., Olivieri G. *Sull'"anatocismo" nell'ammortamento francese.* Banche e Banchieri, Anno XXXXII – N.2/2015.

Levi E. *Corso di Matematica Finanziaria.* La Goliardica, Milano, 1953.

Levi E. *Corso di Matematica Finanziaria.* La Goliardica, Milano, Terza Edizione, 1959.

Moriconi F. *Matematica Finanziaria.* Il Mulino, Bologna, 1994.

Polidori C. *Matematica Finanziaria.* Le Monnier, Firenze, 1954.

Varoli G. *Matematica Finanziaria.* Pàtron Editore, Bologna 1983.